הטכניון – הפקולטה למתמטיקה
חדו"א 1מ 104018
מבחן מועד ב סמסטר חורף 28.02.2016

משך המבחן שלוש שעות, ללא חומר עזר (כולל מחשבונים).
במבחן 5 שאלות. יש לפתור את כולן. יש לרשום פתרונות מנומקים, **בעט (לא אדומה)**, על גבי דפים אלו. אין לצרף דפים נוספים או מחברת טיוטה.
למי שלא עשה את בחן אמצע וזכאי לתחליף, ציון שאלה 1 יהיה תחליף לציון בחן האמצע.

בהצלחה

שאלה 1 (20%)

א. (10%) חשבו את הגבול הבא אם הוא קיים.

$$\lim_{x\to 0^+} \sin(x)\ln(x)$$

ב. (10%) הוכיחו כי

$$-\frac{1}{2} < \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(sin(x))\, dx < 0$$

שאלה 2 (20%)

א. (10%) האם האינטגרל הבא מתכנס?

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}+x^2}$$

ב. (10%) האם הטור מתכנס?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{1+n^2}$$

שאלה 3 (20%)

א. (10%) תהא $f:[0,1]\to[0,1]$ רציפה. הראו כי קיימת נקודה $0\le c\le 1$ עבורה $f(c)=c$.

ב. (10%) נניח שבנוסף להנחות סעיף א' כי f גזירה בקטע $[0,1]$ וכי $|f'(x)| < 1$ לכל $0 \le x \le 1$.
הראו כי קיימת נקודה **יחידה** $0 \le c \le 1$ עבורה $f(c) = c$.

שאלה 4 (20%)

א. (10%) מצאו את המספר b עבורו הגבול הבא קיים (וסופי)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{x^3}+\frac{b}{x^2}\right)$$

עבור b זה, מהו הגבול?

ב. (10%) מצאו פולינום טיילור מסדר 2 סביב הנקודה $a = 0$ של

$$F(x) = \int_{tg(2x)}^{e^x - 1} \cos(t^2)dt$$

יש לרשום את המקדמים של הפולינום כמספרים.

שאלה 5 (20%)

א. (12%) נסחו והוכיחו את משפט רול.

ב. (8%) יהיו f, g פונקציות גזירות בקטע $[a, b]$. הוכיחו כי קיים $a < c < b$ עבורו מתקיים

$$g'(c)\big(f(b) - f(a)\big) = f'(c)\big(g(b) - g(a)\big)$$